Об использовании искусственных нейронных сетей для моделирования экстремумов процессов Леви

Гречко Александр Сергеевич

ООО НПФ «ИнВайз Системс»

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 23-21-00474)

Введение

- Финансовая математика как драйвер развития численных методов.
- Применение методов машинного обучения в финансовой математике.
- Идея совместить два подхода: численные методы и машинное обучение.

Постановка задачи

- Процессы Леви
- Рассмотрим задачу оценки опциона типа lookback
- Метод Монте-Карло.
- Факторизация Винера-Хопфа.
- Возникла идея встроить элементы машинного обучения.

Процессы Леви

Характеристическая экспонента

$$E[e^{i\xi X(t)}] = e^{-t\psi(\xi)}$$

Формула Леви–Хинчина.

$$\psi(\xi) = \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 - i\gamma\xi + \int_{\mathbf{R}} (1 - e^{i\xi x} + i\xi x \mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\Pi(dx)$$

$\sigma \geq 0$ и $\gamma \in \mathbf{R}$ – константы, а Π – мера на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$

Факторизация Виннера–Хопфа

Процессы супремума и инфимума

$$\bar{X}_t = \sup_{0\le s\le t} X_s \qquad \underline{X}_t = \inf_{0\le s\le t} X_s$$

Факторизация Виннера–Хопфа.

$$\int_0^{+\infty} q e^{-qt} E[e^{i\xi X_t}]dt = E\left[e^{i\xi X_{T_q}}\right] = q(q+\psi(\xi))^{-1}$$

$$q(q+\psi(\xi))^{-1} = \phi_q^+(\xi)\phi_q^-(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}$$

$$\phi_q^+(\xi) = E\left[\int_0^{\infty} q e^{-qt} e^{i\xi \bar{X}_t} dt\right] = E\left[e^{i\xi \bar{X}_{T_q}}\right]$$

- Sato, K. Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge University Press, 1999, 486 p.

Функции распределения процессов экстремума

$$F_+(x,T) = \mathbf{P}(\bar{X}_T < x) \quad F_-(x,T) = \mathbf{P}(\underline{X}_T < x)$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_+(x,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt} E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\bar{X}_t - x)\big]dt = q^{-1} E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\bar{X}_{T_q} - x)\big] \\ &= q^{-1}\mathbf{P}(\bar{X}_{T_q} < x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_-(x,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt} E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\underline{X}_t - x)\big]dt = q^{-1}(1 - E\big[\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(\underline{X}_{T_q} - x)\big]) \\ &= q^{-1} - q^{-1}\mathbf{P}(\underline{X}_{T_q} \geq x).\end{aligned}$$

Аппроксимация функций распределения

Теорема 2.2. *Пусть существуют вещественные числа $\omega_- < 0 < \omega_+$ такие, что при любых положительных q характеристические функции $\phi_q^+(\xi)$ (1.5) и $\phi_q^-(\xi)$ (1.6) аналитичны при $\Im\xi > \omega_-$ и при $\Im\xi < \omega_+$, соответственно. Фиксируем четное натуральное число $N = 2n$, определим точки q_k в соответствии с алгоритмом Гавера-Стехфеста:*

$$q_k = \frac{k\ln(2)}{T}, k = 1, \dots, N, \tag{2.13}$$

и весовые коэффициенты ω_k:

$$\omega_k := \frac{(-1)^{n+k}}{k \cdot n!} \sum_{j=[(k+1)/2)]}^{\min\{k,n\}} j^{n+1} C_n^j C_{2j}^j C_j^{k-j}, \tag{2.14}$$

где $[x]$ – целая часть x и $C_L^K = \frac{L!}{(L-K)!K!}$ – формула сочетаний из L элементов по K.

Тогда

$$F_+(x,T) = 0, x \le 0, \tag{2.15}$$

$$F_+(x,T) \approx \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi_T^+(\xi,x)d\xi, x > 0, \tag{2.16}$$

Аппроксимация функций распределения

где

(2.17)
$$\Phi_T^+(\xi, x) = \begin{cases} x, & \text{при } \xi = 0, \\ \frac{(1-e^{ix\xi})}{-i\xi} \sum_{k=1}^N \omega_k \cdot \phi_{q_k}^+(\xi), & \text{при } \xi \neq 0. \end{cases}$$

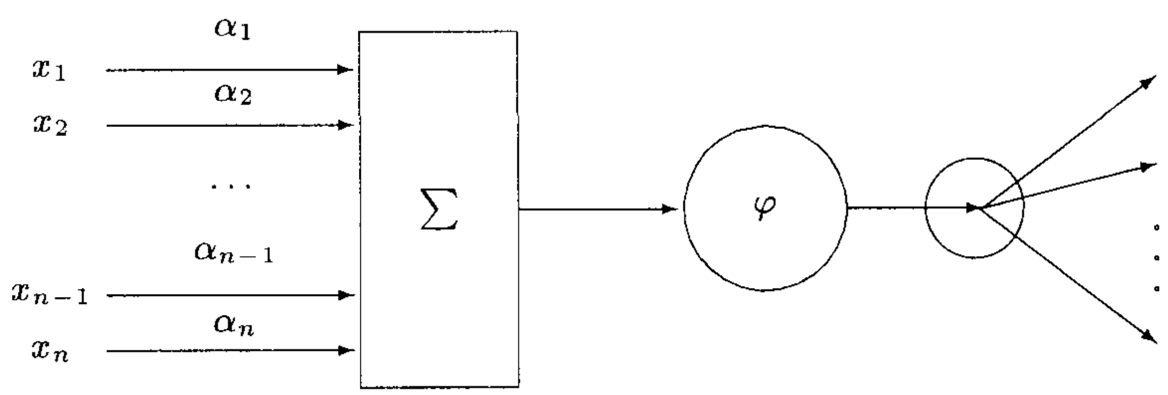
(2.18)
$$F_-(x, T) \;=\; 1, x \geq 0,$$

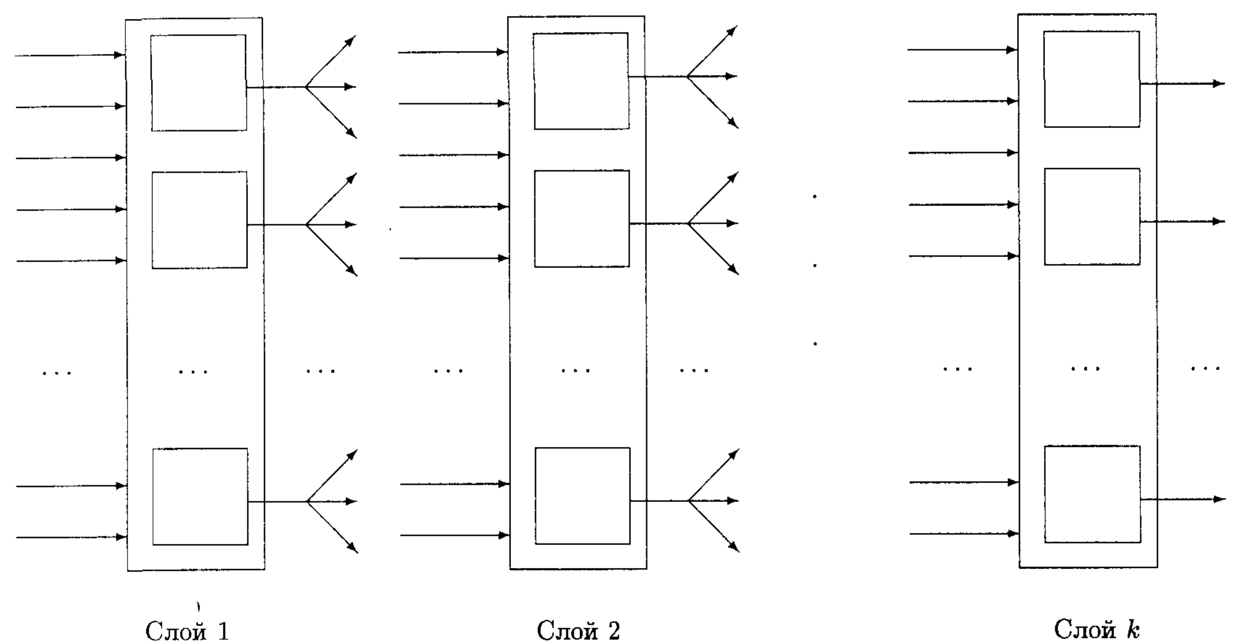
(2.19)
$$F_-(x, T) \;\approx\; 1 - \frac{1}{\pi} \Re \int_0^\infty e^{-ix\xi} \Phi_T^-(\xi, x) d\xi, x < 0,$$

где

(2.20)
$$\Phi_T^-(\xi, x) = \begin{cases} x, & \text{при } \xi = 0, \\ \frac{(e^{ix\xi}-1)}{-i\xi} \sum_{k=1}^N \omega_k \cdot \phi_{q_k}^-(\xi), & \text{при } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Искусственная нейронная сеть





Аппроксимационные способности ИНС

Теорема Колмогорова. *Каждая непрерывная функция n переменных, заданная на единичном кубе n-мерного пространства, представима в виде*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} h_q \left[\sum_{p=1}^{n} \varphi_q^p(x_p) \right],$$

где функции $h_q(u)$ непрерывны, а $\varphi_q^p(x_p)$, кроме того, еще и стандартны, т.е. не зависят от выбора функции f.

Теорема 2.3. *Пусть $s(x)$ – произвольная сигмоидальная функция, а действительные числа таковы, что $a < b$. Для любого $\epsilon > 0$ и заданной функции $F(x) \in C[a, b]$ существует конечная сумма*

$$G(x) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j s(\alpha_j x + \beta_j), \quad \omega_j, \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}, \tag{2.21}$$

такая, что

$$|G(x) - F(x)| < \epsilon, \text{ для любого } x \in [a, b]. \tag{2.22}$$

- Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 5 – с. 953–956.
- Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. Mathematics of Control, Signals and Systems, 1989, 2, pp. 303–314

Аппроксимации обращения функций распределения процессов экстремума.

Теорема 2.4. *Пусть* $s(x)$ *– произвольная сигмоидальная функция. Для любого* $\epsilon > 0$, *заданной надежности* $\gamma \in (0,1)$ *и заданной функции распределения* $F(x)$ *непрерывной случайной величины* X, *принимающей неотрицательные значения, существует конечная сумма*

$$G(u) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j s(\alpha_j u + \beta_j), \quad \omega_j, \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}, \tag{2.23}$$

такая, что

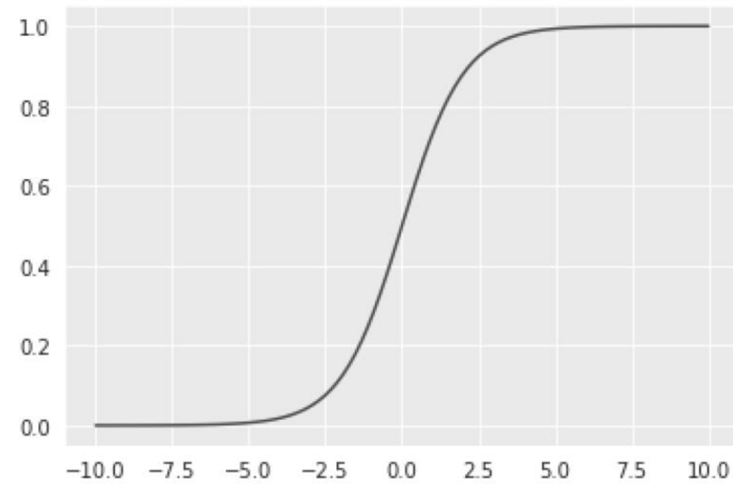
$$\mathbf{P}(|G(U) - F^{-1}(U)| < \epsilon) \geq \gamma, \tag{2.24}$$

где U *– случайная величина, имеющая распределение на промежутке (0,1).*

Функция активации.

Логистическая функция

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$



Линейный выпрямитель или ReLU

$$\phi(x) = \max(x, 0).$$

Предлагаем использовать

$$s(x) = 2\sigma(\phi(x)) - 1$$

Пример применения.

Модель Коу

$$\psi(\xi) = \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 - i\mu\xi + \frac{ic_+\xi}{\lambda_+ + i\xi} + \frac{ic_-\xi}{\lambda_- + i\xi},$$

где $\sigma > 0$, $\mu = \gamma_0 - \int_{-1}^{1} x\pi(x)dx$, $c_\pm > 0$ *и* $\lambda_- < -1 < 0 < \lambda_+$.

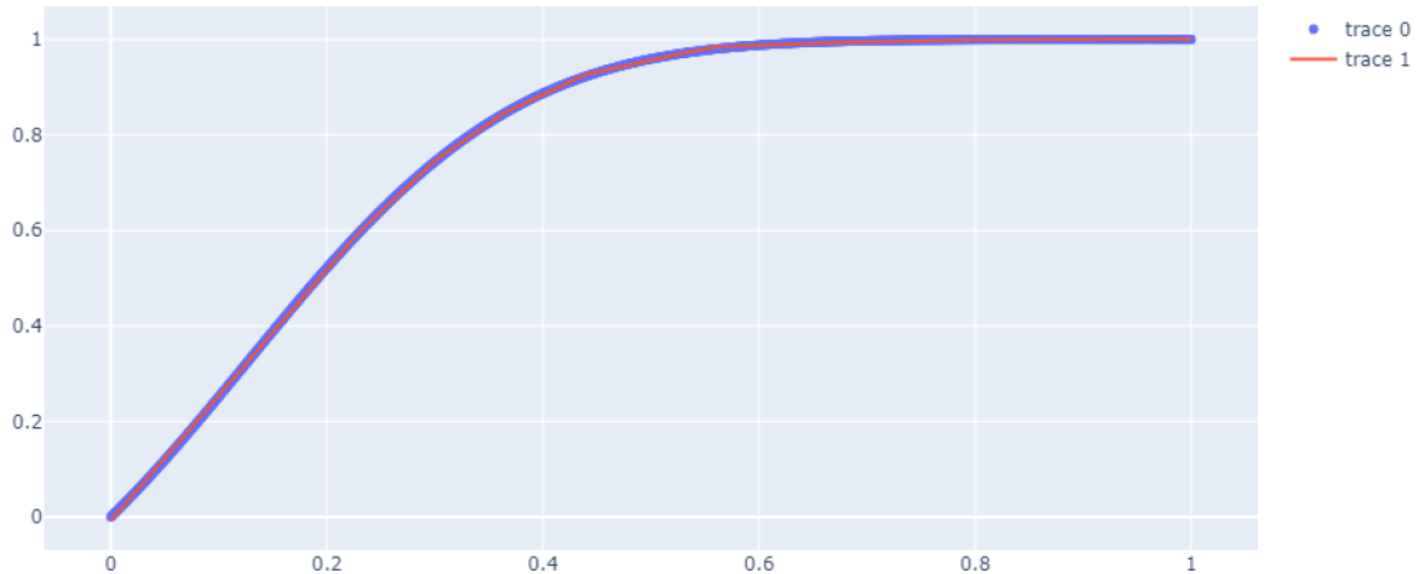
В качестве примера возьмем набор параметров:

$$\sigma = 0.2, \mu = 0.1, c_+ = 1.5, c_- = 1.5, \lambda_+ = 33.33, \lambda_- = -50, T = 1$$

Для обучения нейросети использовался набор $(x_j, F_+(x_j, T))$

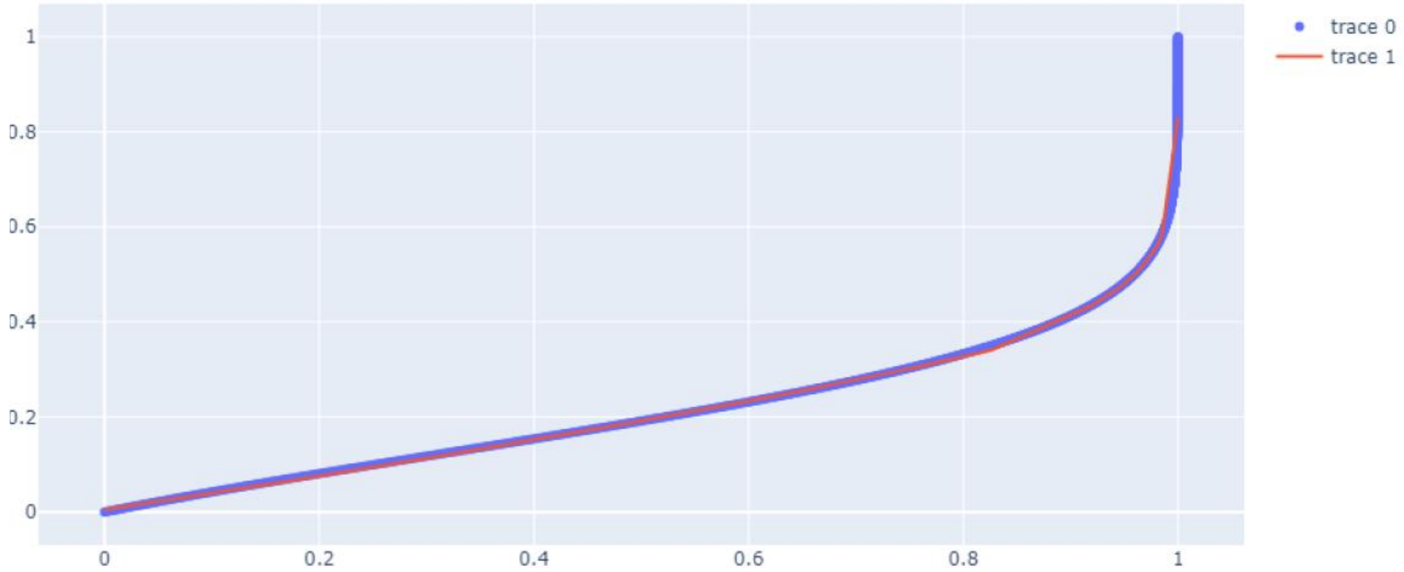
Результаты обучения.

Аппроксимация функции распределения процесса супремума в модели Коу



Результаты обучения.

Аппроксимация обратной функции распределения процесса супремума в модели Коу



Алгоритм универсального метода Винера–Хопфа и Монте–Карло

- Находим характеристические функции .

$$\phi^{+}_{q_k}(\xi)\ (\phi^{-}_{q_k}(\xi))$$

- Вычисляем значения функций на плотной равномерной сетке $\{\xi_j\}$.
- Определяем функцию распределения на плотной равномерной сетке .

$$F_{+}(x_j,T)\ (F_{-}(x_j,T))$$

- Численно обращаем функцию распределения
- Симулируем значения

$$\bar{X}_T = F_{+}^{-1}(U,T)\ (\underline{X}_T = F_{-}^{-1}(U,T))$$