Методы Монте-Карло для вычисления опционов в моделях Леви

Гречко Александр Сергеевич,
научный сотрудник

Общество с ограниченной ответственностью Научно-производственная фирма «ИнВайз Системс»
Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 23-21-00474).

МКСМ-9, 05.06.2024

Введение

- Процессы Леви как обобщение модели Блэка-Шоулза
- Методы Монте-Карло при вычислении цен опционов
- Опционы с выплатами, зависящими от совместного распределения конечного положения процесса Леви и его экстремума
- Универсальный подход построения методов Монте-Карло

Процессы Леви

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – вероятностное пространство, на котором определён одномерный процесс Леви $\{X_t, t \geq 0\}$. Напомним, что характеристическая экспонента, ψ, которая находится из соотношения $E[e^{i\xi X_t}] = e^{-t\psi(\xi)}$ полностью определяет X_t. Согласно хорошо известной формуле Леви-Хинчина, $\psi(\xi)$ допускают следующее представление:

$$\psi(\xi) = \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 - i\gamma\xi + \int_{\mathbf{R}} (1 - e^{i\xi x} + i\xi x \mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\Pi(dx), \qquad (1)$$

где $\sigma \geq 0$ и $\gamma \in \mathbf{R}$ – константы, а Π – мера на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющая свойству

$$\int_{\mathbf{R}} \min\{1, x^2\}\Pi(dx) < +\infty.$$

Процессы экстремумов

Обозначим через $\mathcal{S}_t = \sup_{0 \le s \le t} X_s$ и $\mathcal{I}_t = \inf_{0 \le s \le t} X_s$. Процессы $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_t\}$ и $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_t\}$ называются процессами *супремума* и *инфимума*, соответственно.
Введем случайное время T_q, имеющее показательное распределение с параметром интенсивности $q > 0$, и рассмотрим характеристическую функцию распределения X_{T_q}:

$$E\left[e^{i\xi X_{T_q}}\right] = q(q + \psi(\xi))^{-1}.$$

Факторизация Винера-Хопфа. Теорема.

Существует единственная пара характеристических функций $\phi_q^+(\xi)$ и $\phi_q^-(\xi)$ бесконечно делимых распределений с носителями на $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$, соответственно, таких, что выполняется тождество:

$$q(q+\psi(\xi))^{-1} = \phi_q^+(\xi)\phi_q^-(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

где функции $\phi_q^+(\xi)$ и $\phi_q^-(\xi)$ – это характеристические функции распределений $\mathcal{S}_{T_q}$ и $\mathcal{I}_{T_q}$, соответственно:

$$\phi_q^+(\xi) = E\left[\int_0^\infty qe^{-qt}e^{i\xi\mathcal{S}_t}dt\right] = E\left[e^{i\xi\mathcal{S}_{T_q}}\right], \tag{3}$$

$$\phi_q^-(\xi) = E\left[\int_0^\infty qe^{-qt}e^{i\xi\mathcal{I}_t}dt\right] = E\left[e^{i\xi\mathcal{I}_{T_q}}\right]. \tag{4}$$

Условные функции распределения процесса Леви относительно его экстремума

- $F^+(x, T) = \mathbf{P}(\mathcal{S}_T < x)$ – функция распределения положения процесса супремума $\mathcal{S}_T$;
- $F^-(x, T) = \mathbf{P}(\mathcal{I}_T < x)$ – функция распределения положения процесса инфимума $\mathcal{I}_T$;
- $F_X^+(x, y, T) = \mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{S}_T < y)$ – функция совместного распределения величин X_T и $\mathcal{S}_T$;
- $F_X^-(x, y, T) = \mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{I}_T < y)$ – функция совместного распределения величин X_T и $\mathcal{I}_T$;
- $F_{X|\mathcal{S}}(x, y, T) = \mathbf{P}(X_T < x | \mathcal{S}_T = y)$ – условная функция распределения величины X_T относительно $\mathcal{S}_T$;
- $F_{X|\mathcal{I}}(x, y, T) = \mathbf{P}(X_T < x | \mathcal{I}_T = y)$ – условная функция распределения величины X_T относительно $\mathcal{I}_T$.

Преобразования Лапласа функций распределения экстремумов

Применяя преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ к $F^+(x, T)$ по времени T, имеем

$$\begin{aligned}\hat{F}^+(x,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt} E\left[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{S}_t - x)\right] dt \\ &= q^{-1} E\left[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{S}_{T_q} - x)\right] \\ &= q^{-1}\mathbf{P}(\mathcal{S}_{T_q} < x) \equiv q^{-1}\mathbf{P}(X_{T_q} - \mathcal{I}_{T_q} < x).\end{aligned}$$

Аналогично, применяя преобразование Лапласа к $F^-(x, T)$, получаем:

$$\begin{aligned}\hat{F}^-(x,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt} E\left[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_t - x)\right] dt \\ &= q^{-1} E\left[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q} - x)\right] \\ &= q^{-1}\mathbf{P}(\mathcal{I}_{T_q} < x) \equiv q^{-1}\mathbf{P}(X_{T_q} - \mathcal{S}_{T_q} < x).\end{aligned}$$

Теорема 1.1

Пусть $q > 0$ и $\omega_- < 0 < \omega_+$ таковы, что хар. функции $\phi_q^+(\xi)$ (3) и $\phi_q^-(\xi)$ (4) аналитичны при $\Im\xi > \omega_-$ и при $\Im\xi < \omega_+$, соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{S}_{T_q} < x) &= 0, x \le 0, &(5)\\ \mathbf{P}(\mathcal{S}_{T_q} < x) &= \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi_q^+(\xi, x)d\xi, x > 0, &(6)\end{aligned}$$

где

$$\Phi_q^+(\xi, x) = \begin{cases} x, & \text{при } \xi = 0,\\ \frac{\phi_q^+(\xi)(1-e^{ix\xi})}{-i\xi}, & \text{при } \xi \ne 0.\end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{I}_{T_q} < x) &= 1, x \ge 0, &(8)\\ \mathbf{P}(\mathcal{I}_{T_q} < x) &= 1 - \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi_q^-(\xi, x)d\xi, x < 0, &(9)\end{aligned}$$

где

$$\Phi_q^-(\xi, x) = \begin{cases} x, & \text{при } \xi = 0,\\ \frac{\phi_q^-(\xi)(e^{ix\xi}-1)}{-i\xi}, & \text{при } \xi \ne 0.\end{cases} \qquad (10)$$

Теорема 1.2

Пусть существуют вещественные числа $\omega_- < 0 < \omega_+$ такие, что при любых положительных q характеристические функции $\phi_q^+(\xi)$ (3) и $\phi_q^-(\xi)$ (4) аналитичны при $\Im\xi > \omega_-$ и при $\Im\xi < \omega_+$, соответственно. Фиксируем четное натуральное число $N = 2n$, определим точки q_k в соответствии с алгоритмом Гавера-Стехфеста:

$$q_k = \frac{k\ln(2)}{T}, k = 1, \ldots, N, \tag{11}$$

и весовые коэффициенты ω_k:

$$\omega_k := \frac{(-1)^{n+k}}{k \cdot n!} \sum_{j=[(k+1)/2)]}^{\min\{k,n\}} j^{n+1} C_n^j C_{2j}^j C_j^{k-j}, \tag{12}$$

где $[x]$ – целая часть x и $C_L^K = \frac{L!}{(L-K)!K!}$ – формула сочетаний из L элементов по K.

Теорема 1.2. Продолжение.

Тогда

$$\begin{aligned} F_+(x,T) &= 0, x \le 0, && (13)\\ F_+(x,T) &\approx \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi_T^+(\xi,x)d\xi, x > 0, && (14) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_T^+(\xi,x) = \begin{cases} x, & \text{при } \xi = 0,\\ \frac{(1-e^{ix\xi})}{-i\xi}\sum_{k=1}^N \omega_k \cdot \phi_{q_k}^+(\xi), & \text{при } \xi \ne 0. \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} F_-(x,T) &= 1, x \ge 0, && (16)\\ F_-(x,T) &\approx 1 - \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi_T^-(\xi,x)d\xi, x < 0, && (17) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_T^-(\xi,x) = \begin{cases} x, & \text{при } \xi = 0,\\ \frac{(e^{ix\xi}-1)}{-i\xi}\sum_{k=1}^N \omega_k \cdot \phi_{q_k}^-(\xi), & \text{при } \xi \ne 0. \end{cases} \quad (18)$$

Теорема 2.1. Аппроксимация условной функции распределения

При $N = 2n$, определим q_k по алгоритму Гавера-Стехфеста:

$$q_k = \frac{k\ln(2)}{T}, k = 1, \ldots, N, \tag{19}$$

и весовые коэффициенты ω_k:

$$\omega_k := \frac{(-1)^{n+k}}{k \cdot n!} \sum_{j=[(k+1)/2)]}^{\min\{k,n\}} j^{n+1} C_n^j C_{2j}^j C_j^{k-j}, \tag{20}$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_{X|\mathcal{I}}(x, y, T) &= 0, y > 0, \\ F_{X|\mathcal{I}}(x, y, T) &\approx \frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(x-y, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)}{p^-_T(y)}, y \le 0, x \ge y, \end{aligned}$$

где $p_t^-(x)$ и $\hat{p}_q^-(x)$– плотности вероятности $\mathcal{I}_t$ и $\mathcal{I}_{T_q}$, соответственно.

Теорема 2.2

Определим $\hat{F}^{-}(x,q)$ по формуле (5). Фиксируем четное натуральное число $N = 2n$, определим точки q_k в соответствии с алгоритмом Гавера-Стехфеста (19)-(20).
Тогда

$$\begin{aligned} F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T) &= 0, y < 0, \\ F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T) &\approx \frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^{-}(x-y,q_k)\hat{p}^{+}_{q_k}(y)}{p^{+}_{T}(y)}, y \geq 0, x \leq y, \end{aligned}$$

где $p^{+}_{t}(x)$ и $\hat{p}^{+}_{q}(x)$– плотности вероятности $\mathcal{S}_t$ и $\mathcal{S}_{T_q}$, соответственно.

Теорема 2.3

Пусть существуют вещественные числа $\omega_- < 0 < \omega_+$ такие, что при любых положительных q характеристические функции $\phi_q^+(\xi)$ (3) и $\phi_q^-(\xi)$ (4) аналитичны при $\Im\xi > \omega_-$ и при $\Im\xi < \omega_+$, соответственно. Фиксируем четное натуральное число $N = 2n$, определим точки q_k в соответствии с алгоритмом Гавера-Стехфеста (см. (19)-(20)).
Тогда

$$\begin{aligned} p_T^-(x) &= 0, x > 0, && (21) \\ p_T^-(x) &= \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi^-(\xi, T)d\xi, x \leq 0, && (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_T^+(x) &= 0, x < 0, && (23) \\ p_T^+(x) &= \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi^+(\xi, T)d\xi, x \geq 0, && (24) \end{aligned}$$

Теорема 2.3. Продолжение

где

$$\Phi^{-}(\xi, T) := E\left[e^{i\xi\mathcal{I}_T}\right] \approx \sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot q_k^{-1} \cdot \phi_{q_k}^{-}(\xi). \tag{25}$$

$$\Phi^{+}(\xi, T) := E\left[e^{i\xi\mathcal{S}_T}\right] \approx \sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot q_k^{-1} \cdot \phi_{q_k}^{+}(\xi). \tag{26}$$

Универсальный метод Монте-Карло для вычисления цен опционов

Суммируя выше сказанное, мы получаем следующий алгоритм симуляции совместного распределения конечного положения процесса Леви и его инфимума:

- В точках q_k, определяемых алгоритмом Гавера-Стехфеста, с помощью Теоремы 1.1 вычисляем значения функций $\hat{F}^+(x, q_k)$ на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Функцию распределения $F^-(x_j, T)$ вычисляем с помощью Теоремы 1.2 на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Симулируем значения $\mathcal{I}_T = y$, решая (с помощью интерполяции или обученной нейросети) уравнение $F^-(y, T) = U$, где U – равномерное распределение на $(0, 1)$.

- Симулируем совместное распределение $X_T = y + z$ и $\mathcal{I}_T = y$, где положительное число z находится путем решения (с помощью интерполяции или обученной нейросети) уравнения

$$F_{X|\mathcal{I}}(y+z, y, T) = V, \tag{27}$$

где V – равномерное распределение на $(0,1)$, независимое от U. С помощью теоремы 2.1 решение (27) численно сводится к решению

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^{+}(z, q_k)\hat{p}^{-}_{q_k}(y)}{p^{-}_{T}(y)} = V, \tag{28}$$

где V – равномерное распределение на $(0,1)$, независимое от U.

Аналогично можно построить алгоритм симуляции совместного распределения конечного положения процесса Леви и его супремума:

- В точках q_k, определяемых алгоритмом Гавера-Стехфеста, с помощью Теоремы 1.1 вычисляем значения функций $\hat{F}^-(x, q_k)$ на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Функцию распределения $F^+(x_j, T)$ вычисляем на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$ с помощью Теоремы 1.2.
- Симулируем значения $\mathcal{S}_T = y$, решая (с помощью интерполяции или обученной нейросети) уравнение $F^+(y, T) = U$, где U – равномерное распределение на $(0, 1)$.

- Симулируем совместное распределение $X_T = y + z$ и $\mathcal{S}_T = y$, где отрицательное число z находится путем решения (с помощью интерполяции или обученной нейросети) уравнения

$$F_{X|\mathcal{S}}(y + z, y, T) = V, \tag{29}$$

где V – равномерное распределение на $(0, 1)$, независимое от U. С помощью теоремы 2.2 решение (29) численно сводится к решению

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^{-}(z, q_k) \hat{p}^{+}_{q_k}(y)}{p^{+}_{T}(y)} = V. \tag{30}$$

Пусть цена экзотического опциона с моментом исполнения T в момент времени $t = 0$ определяется по формуле:

$$V(T,S) = e^{-rT} E\left[G(Se^{\mathcal{S}_T}, Se^{X_T})\right], \tag{31}$$

где G(M, S) – функция выплат по опциону.
Обозначим через

$$\widehat{V}(T,S) := e^{-rT} S \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} G(Se^{\widehat{\mathcal{S}}_n}, Se^{\widehat{\mathcal{S}}_n + \widehat{Z}_n}),$$

где N – количество симуляций,
$\widehat{\mathcal{S}}_n$ решение уравнения $F^+(y, T) = u_n$ относительно y;
$\widehat{Z}_n = \mathcal{S}_n$ решение $F_{X|\mathcal{S}}(u_n + z, u_n, T) = v_n$ относительно z;
(u_n, v_n) – симуляция с номером n пары независимых равномерно распределенных на $(0, 1)$ случайных величин U и V. Тогда

$$V(T,S) = \widehat{V}(T,S) + O(N^{-\frac{1}{2}}).$$