Случайное разбиение и метод Монте-Карло

Данилова Н.В.
Южный федеральный университет,
ООО НПФ "ИнВайз Системс"

Исследование выполнено при поддержке РНФ, проект № 23-21-00474

Ростов-на-Дону, ОТНА-2024

Метод бинарной аппроксимации со случайным разбиением.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s,$$

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \sigma W_t \\ Y_t = \int_0^t \varphi(W_s)ds + \int_0^t \psi(W_s)dW_s \end{cases}$$

$$Y_t = \ln Z_t, Z_0 = 1,$$

$$\varphi(W_t) = -\frac{\mu^2(X_0 + \sigma W_t)}{2\sigma^2}, \psi(W_t) = \frac{\mu(X_0 + \sigma W_t)}{\sigma}.$$

Метод бинарной аппроксимации со случайным разбиением.

$$\overline{\omega} = \{(\tau_1, \delta_1), (\tau_2, \delta_2), ..., (\tau_n, \delta_n), ...\},$$

$$\tau_i(\omega) = \min\{\tau_{i-1}(\omega) \le t : |W_t(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega)| = h\}, \tau_0(\omega) = 0,$$

$$\delta_i(\omega) = \begin{cases} 1, W_{\tau_i}(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega) = h \\ -1, W_{\tau_i}(\omega) - W_{\tau_{i-1}}(\omega) = -h \end{cases}$$

$$\nu_i = \tau_i - \tau_{i-1},$$

$$P(\delta_i = 1) = P(\delta_i = -1) = 0.5.$$

$$\overline{Y}_{\tau_N} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi^i(W_{\tau_{j-1}^N})}{i!} \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^i ds + \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{m} \frac{\psi^i(W_{\tau_{j-1}^N})}{i!} \int_{\tau_{j-1}^N}^{\tau_j^N} (W_s - W_{\tau_{j-1}^N})^i dW_s,$$

$$|\Delta_N| \le A_k(\beta) \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{k+1}{2}} + B_m(\beta) \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{m+1}{2}},$$

$$\tilde{Y}_{\tau_n} = \tilde{Y}_{\tau_{n-1}} + \frac{1}{2} h^2 \psi'(W_{\tau_{n-1}}) + \left(\varphi(W_{\tau_{n-1}}) - \frac{1}{2}\psi'(W_{\tau_{n-1}})\right) \nu_n + (\nu_n \varphi'(W_{\tau_{n-1}}) + \psi(W_{\tau_{n-1}})) h \delta_n.$$

Метод бинарной аппроксимации со случайным разбиением.

Первая задача.

$Ef(X_T)I_{\{\overline{X}_T \le b\} \wedge \{\underline{X}_T \ge a\}}$,

$\overline{X}_T = \sup\limits_{t \le T} X_t$, $\underline{X}_T = \inf\limits_{t \le T} X_t$,

$Ef(X_T)I_{\{\overline{X}_T \le b\} \wedge \{\underline{X}_T \ge a\}} =$

$= E^* Z_T f(X_0 + \sigma W_T) I_{\left\{\overline{W}_T \le \frac{1}{\sigma}(b - X_0)\right\} \wedge \left\{\underline{W}_T \ge \frac{1}{\sigma}(a - X_0)\right\}}$.

Вторая задача.

$\Psi(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k I_{\{x \le b_k\} \wedge \{y \ge a_k\}}$,

$a_n < \ldots < a_1 < b_1 < \ldots < b_n$,

$\varphi_k \ge 0$,

$E\Psi(\overline{X}_T, \underline{X}_T) = E^* Z_T \Psi(X_0 + \sigma \overline{W}_T, X_0 + \sigma \underline{W}_T)$.

Если $\Psi(x, y) = I_{\{x \le b\} \wedge \{y \ge a\}}$, то $E\Psi(\overline{X}_T, \underline{X}_T)$ – вероятность невыхода случайного процесса из полосы $\prod = \{(x, t) : a \le x \le b, 0 \le t \le T\}$.

Метод бинарной аппроксимации со случайным разбиением.

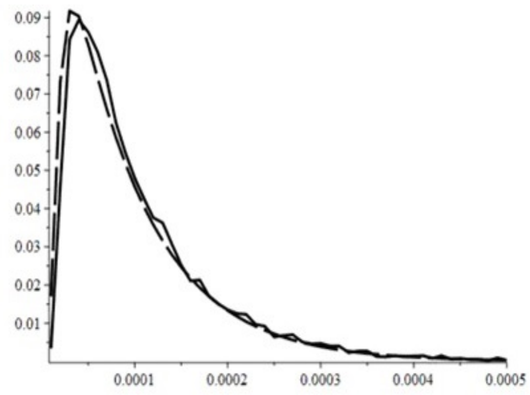

Рисунок 1. Эмпирическая и реальная плотности распределения случайной величины ν, сплошная линия – эмпирическая плотность, пунктирная линия – реальная плотность.

Семимартингальная модель Блэка-Шоулса.

$$W_{\tau_i} = W_{\tau_{i-1}} + h\delta_i, W_t^h = W_{\tau_{i-1}}, \tau_{i-1} \le t < \tau_i, i = 1, 2, ..., \tau_0 = 0.$$

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t^h) \\ dB_t = B_t r dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_t = S_{\tau_{i-1}} \left[\exp(\mu(t - \tau_{i-1}))I\{\tau_{i-1} \le t < \tau_i\} + \exp(\mu \nu_i)(1 + \sigma h \delta_i) I\{t = \tau_i\}\right] \\ B_t = B_0 \exp(rt) \end{cases}$$

$$C \approx \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2^{N_T^h(i)}} \sum_{k=0}^{N_T^h(i)} C^k_{N_T^h(i)} f\left(S_0 \exp(r\tau_N(i))(1 + \sigma h)^k (1 - \sigma h)^{N_T^h(i) - k}\right),$$

$$N_T^h(i) = \max\{n : \tau_n(i) \le T\}.$$

Модель случайного блуждания с пропущенными слагаемыми.

$$
\begin{aligned}
&\Delta X_n = \mu(X_{n-1})m + \sigma(X_{n-1})\Delta W_n,\\
&\Delta Y_n = \sigma\sqrt{m}\delta_n, \delta_n = \mathrm{sign}(X_n - Y_{n-1}),\\
&\Delta Y_n = \sigma\sqrt{m}\beta_n\delta_n, \beta_n = I_{\{|X_n - Y_{n-1}| \geq h_m\}}, h_m = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{m},\\
&S_n = S_0 e^{rnm}(1+\sigma\sqrt{m})^{\eta_n(\delta)}(1-\sigma\sqrt{m})^{\xi_n(\beta)-\eta_n(\delta)},\\
&\xi_n(\beta) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i, \eta_n(\delta) = \sum_{i=1}^{\xi_n(\beta)}\max(\delta_i, 0), n = 1, 2, \ldots, N,\\
&C = e^{-rT}E_{\xi_N(\beta)}\left[\frac{1}{2^{\xi_N(\beta)}}\sum_{i=0}^{\xi_N(\beta)} C^i_{\xi_N(\beta)} f\left(S_0 e^{rT}(1+\sigma\sqrt{m})^i(1-\sigma\sqrt{m})^{\xi_N(\beta)-i}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Случайное разбиение пассажами винеровского процесса со сносом.

Первая модель.

$\tau_0 = 0, \ldots, \tau_i = \inf\{\tau_{i-1} \le t : |b(t-\tau_{i-1}) + (W_t - W_{\tau_{i-1}})| \le a\}$,

$\tau_i = \tau_{i-1} + \nu_i, \nu = \inf\{t : |bt + W_t| \le a\}$,

$\nu_a = \inf\{t : bt + W_t \ge a\}, \nu_{-a} = \inf\{t : bt + W_t \le -a\}$,

$$\delta = \begin{cases} 1, \nu_a > \nu_{-a} \\ -1, \nu_a < \nu_{-a} \end{cases}$$

$$P(\delta = 1) = P(\nu_a < \nu_{-a}) = \frac{\exp(ba) - 1}{\exp(ba) - \exp(-ba)}.$$

Вторая модель.

$$\nu = \min\{\nu_a, \nu_{-a}\} = \begin{cases} \nu_a, \delta = 1 \\ \nu_{-a}, \delta = -1 \end{cases}$$

$p_\nu(t) = p_{\nu_a}(t)P(\delta = 1) + p_{\nu_{-a}}(t)P(\delta = -1)$.

Пример 1.

Параметры уравнений:
X_0 – начальное значение
α – множитель возврата
β – точка возврата
σ – волатильность
Задана полоса $[a, b]$.
Процесс Орнштейна-Уленбека: $X_0 = 0, \beta = 0, \sigma = 0.1, a = -0.1, b = 0.1$.
Процесс квадратного корня: $X_0 = 0.49, \beta = 0.49, \sigma = 0.1, a = 0.13,$
$b = 0.85$.

Пример 1.

Таблица 1. Вероятность невыхода процесса Орнштейна Уленбека из полосы.

α	Краевая задача	Бинарная аппроксимация с пропущенными слагаемыми	Аппроксимация нормальными с.в. с постоянным разбиением
1	0.5275	0.5311	0.5658
2	0.6769	0.6723	0.6816
3	0.8009	0.7930	0.7763
4	0.8896	0.8786	0.8500
5	0.9450	0.9372	0.9026
6	0.9755	0.9697	0.9697
7	0.9903	0.9828	0.9447

Для бинарной аппроксимации с пропущенными слагаемыми среднеквадратическая разница с первым столбцом равна 0.0079, для Эйлера-Мурояма – 0.0367.

Пример 1.

Таблица 2. Вероятность невыхода процесса квадратного корня из полосы.

α	Краевая задача	Бинарная аппроксимация с пропущенными слагаемыми	Аппроксимация нормальными с.в. с постоянным разбиением
1	0.2727	0.2735	0.2432
2	0.3846	0.3851	0.3461
3	0.4909	0.4904	0.4414
4	0.5796	0.5827	0.5290
5	0.6487	0.6515	0.6090
6	0.7031	0.7106	0.6814
7	0.7483	0.7534	0.7462

Для бинарной аппроксимации с пропущенными слагаемыми среднеквадратическая разница с первым столбцом равна 0.0057, для Эйлера-Муроямa – 0.0375.